

УДК 531.36

Нелинейная динамика модели скейтборда с тремя степенями свободы

А. В. Кремнев, А. С. Кулешов

Кафедра Теоретической механики и мехатроники
Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова,
Россия 119991, г. Москва, Ленинские горы
E-mails: avkremen@mail.ru, kuleshov@mech.math.msu.su

Получено 30 мая 2008 г.

Изучается математическая модель, описывающая движение человека на скейтборде. Данная модель скейтборда является более общей по сравнению с моделью, изученной авторами ранее [1]. Как и при рассмотрении предыдущей модели, предполагается, что управление скейтбордом со стороны человека отсутствует. Получены уравнения движения модели и проведен анализ этих уравнений. Изучено влияние различных параметров модели на ее динамику.

Ключевые слова: скейтборд, неголономные связи, интегрируемость, устойчивость движения

A. V. Kremnev and A. S. Kuleshov

Nonlinear Dynamics of a Skateboard Model with Three Degrees of Freedom

In this paper we continue our investigation of dynamics and stability of motion of a skateboard with a rider. In our previous papers we assumed that the rider, modeled as a rigid body, remains fixed and perpendicular with respect to the board. Hence if the board tilts through γ , the rider tilts through the same angle relative to the vertical, i. e. only one generalized coordinate γ describes the tilt of the board and rider.

Now we make the next step in modeling complexity and we allow the board and rider to have separate degrees of freedom, γ and φ , respectively. Here the rider is assumed to be connected to the board with a pin along the central line of the board through a torsional spring which exerts a torque on the rider and board proportional to the difference in their tilts relative to the vertical. Equations of motion of the model are derived and the problem of integrability of the obtained equations is investigated. The influence of various parameters of the model on its dynamics and stability is studied.

Keywords: skateboard, nonholonomic constraints, integrability, stability of motion

Mathematical Subject Classifications: 70F25, 70E18, 70E40, 70E50

1. Введение

В данной работе продолжены исследования, начатые авторами в препринтах [1, 2]. Однако для того, чтобы ее можно было читать независимо от препринтов [1, 2], в нее включена часть результатов, полученных в [1, 2]. Эти результаты изложены более кратко, чем в [1, 2], и служат лишь для понимания особенностей конструкции скейтборда, влияющих на его кинематику и динамику.

Обычный скейтборд состоит из доски, двух подвесок, соединяющих колеса с доской, и четырех колес (рис. 1–2). Современные доски обычно имеют размеры 78–83 см в длину, 17–21 см в ширину и толщиной 1–2 см [1].

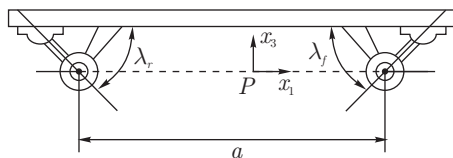


Рис. 1. Скейтборд: вид сбоку

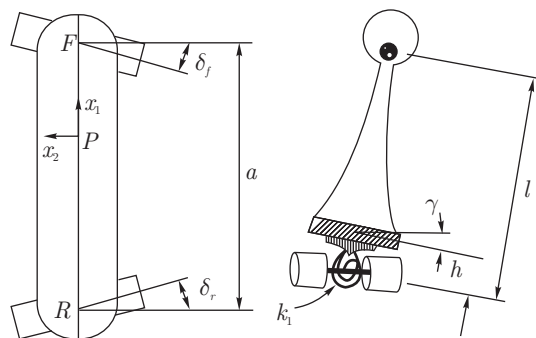


Рис. 2. Скейтборд: вид сверху и сзади

Наиболее существенными элементами скейтборда являются подвески, при помощи которых оси колес крепятся к доске. Вращение как передней, так и задней колесной пары происходит вокруг соответствующих наклонных осей — пивотов (рис. 1). Это приводит к тому, что всякий раз, когда доска не параллельна плоскости движения, колесные пары поворачиваются на соответствующие углы относительно вертикальной оси, перпендикулярной плоскости движения (рис. 2). Управление скейтбордом происходит с использованием именно этой зависимости между углом наклона доски и углами поворота колесных пар.

В нашей работе мы будем предполагать, что скейтборд движется по горизонтальной плоскости и при этом все четыре его колеса опираются о плоскость.

Предположим также, что в случае наклона доски скейтборда возникает восстанавливающий момент, который возвращает доску в первоначальное положение. Будем считать, что величина этого момента пропорциональна углу наклона доски; соответствующий коэффициент пропорциональности обозначим k_1 . Такой момент может возникать, например, если доска соединена с колесами при помощи торсионных пружин (рис. 2). Ранее такое же предположение о наличии восстанавливающего момента было сделано в работах [3, 4]; оно вполне обосновывается конструктивными особенностями современных подвесок.

2. Постановка задачи. Основные системы координат

При рассмотрении простейшей модели скейтборда мы предполагали (см. [1]), что райдер — человек, катающийся на скейтборде, — стоит неподвижно, так что при наклоне доски на некоторый угол γ райдер отклоняется от вертикали на тот же угол. Теперь мы будем предполагать, что наклон доски и наклон райдера определяются двумя независимыми координатами — углами γ и φ . Предположим также, что райдер соединен с доской при помощи торсионной пружины, ко-

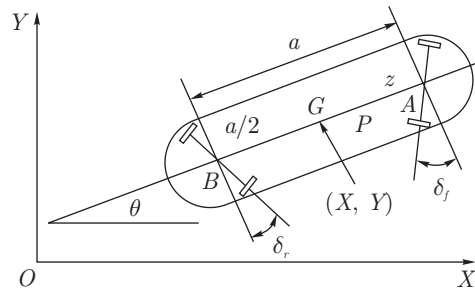


Рис. 3. Система координат

торая создает восстанавливающий момент, по величине равный $T = k_2 (\gamma - \varphi)$, где k_2 — жесткость пружины (рис. 2). Поскольку нами исследуется случай, когда управление скейтбордом со стороны райдера отсутствует, то можно принять именно такой принцип взаимодействия райдера с доской [2, 5].

Введем неподвижную систему координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке O плоскости, по которой движется скейтборд, и осью OZ , перпендикулярной плоскости движения. Обозначим середины осей передних и задних колес скейтборда через A и B соответственно. Пусть расстояние AB равно a (рис. 2, 3). Положение отрезка AB относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ определяется координатами X, Y его середины G и углом θ , который данный отрезок образует с неподвижной осью OX (рис. 3).

При наклоне доски на угол γ ось передней колесной пары поворачивается на угол δ_f по часовой стрелке, а ось задней колесной пары поворачивается на угол δ_r против часовой стрелки (рис. 2, 3). Предположим, что скейтборд движется таким образом, что его колеса не могут проскальзывать в направлении, перпендикулярном плоскости колеса. Это требование приводит к тому, что на систему накладываются две неголономные связи

$$\begin{aligned} -\dot{X} \sin(\theta - \delta_f) + \dot{Y} \cos(\theta - \delta_f) + \frac{a}{2} \dot{\theta} \cos \delta_f &= 0, \\ -\dot{X} \sin(\theta + \delta_r) + \dot{Y} \cos(\theta + \delta_r) - \frac{a}{2} \dot{\theta} \cos \delta_r &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Мы можем разрешить уравнения связей (2.1) относительно \dot{X} и \dot{Y} . Получим

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{a\dot{\theta}}{2 \sin(\delta_f + \delta_r)} [\cos \delta_f \cos(\theta + \delta_r) + \cos \delta_r \cos(\theta - \delta_f)], \\ \dot{Y} &= -\frac{a\dot{\theta}}{2 \sin(\delta_f + \delta_r)} [\cos \delta_f \sin(\theta + \delta_r) + \cos \delta_r \sin(\theta - \delta_f)]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Скорости точек A и B при этом будут направлены горизонтально и перпендикулярно осям колес. В этом случае на отрезке AB существует точка P , скорость которой направлена вдоль прямой AB . Если обозначить скорость точки P через u , а ее расстояние от точки A — через z , то легко получить следующие формулы (см. [1]):

$$u = -\frac{a\dot{\theta} \cos \delta_f \cos \delta_r}{\sin(\delta_f + \delta_r)}, \quad \dot{\theta} = -\frac{u \sin(\delta_f + \delta_r)}{a \cos \delta_f \cos \delta_r}, \quad z = \frac{a \sin \delta_f \cos \delta_r}{\sin(\delta_f + \delta_r)}. \quad (2.3)$$

Используя теорию конечных поворотов (см., например, [6]), можно показать, что угол наклона доски γ связан с углами поворота колесных осей кинематическими соотношениями

$$\operatorname{tg} \delta_f = \operatorname{tg} \lambda_f \sin \gamma, \quad \operatorname{tg} \delta_r = \operatorname{tg} \lambda_r \sin \gamma, \quad (2.4)$$

где λ_f, λ_r — углы наклона передней и задней подвесок относительно горизонтали (рис. 1). Впервые формулы (2.4) несколько иным способом были получены в курсовой работе [7]. Подробное объяснение того, как получить эти формулы, содержится в [1]. Отметим также, что полученные формулы полностью согласуются с экспериментальными данными, полученными при исследовании конструкции подвески скейтборда и размещенными на сайте [8].

С учетом этих соотношений расстояние z от точки A до точки P будет равно

$$z = \frac{a \sin \delta_f \cos \delta_r}{\sin(\delta_f + \delta_r)} = \frac{a \operatorname{tg} \delta_f}{\operatorname{tg} \delta_f + \operatorname{tg} \delta_r} = \frac{a \operatorname{tg} \lambda_f}{\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r},$$

т. е. при выполнении условий (2.4) точка P всегда находится на постоянном расстоянии от точки A , зависящем лишь от углов λ_f и λ_r наклона передней и задней подвесок к горизонтали. Это обстоятельство позволяет нам ввести подвижную систему координат $Px_1x_2x_3$ с началом в точке P , единичные векторы которой обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Единичный вектор \mathbf{e}_1 этой системы направлен по прямой AB в сторону движения, вектор \mathbf{e}_3 перпендикулярен плоскости движения, а вектор \mathbf{e}_2 направлен перпендикулярно \mathbf{e}_1 так, чтобы векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образовывали правую тройку. В дальнейшем все исследования динамики будут проводиться относительно двух введенных систем координат — неподвижной $OXYZ$ и подвижной $Px_1x_2x_3$.

3. Уравнения движения

Предположим, что доска скейтборда расположена на высоте h от прямой AB , длина доски, как и расстояние AB , равна a и ее центр масс C расположен на продольной оси доски посередине между точками крепления подвесок. В отношении райдера будем предполагать, что он стоит не в центре доски, а на ее продольной оси в точке E на расстоянии d от переднего края доски. Пусть центр масс райдера находится в точке R , высота которой над продольной линией доски равна ℓ . Введем также следующие обозначения: m_b — масса доски, m_r — масса райдера, I_{bx}, I_{by}, I_{bz} — главные центральные моменты инерции доски, I_{rx}, I_{ry}, I_{rz} — главные центральные моменты инерции райдера.

Используя соотношения (2.4), можно выразить производные \dot{X}, \dot{Y} и $\dot{\theta}$ через u и γ . Таким образом, уравнения, которым удовлетворяют переменные u, γ и φ , могут рассматриваться независимо от соотношений (2.2)–(2.3). Эти уравнения имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} & (A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma) \dot{u} + (4G_1 \sin^2 \gamma - L_1) u \dot{\gamma} \cos \gamma \sin \varphi + \\ & + (2G_1 \sin^2 \gamma + H_1 \sin \gamma \sin \varphi - 2L_1) \dot{u} \sin \gamma \sin \varphi + \\ & + B_1 (\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) \sin \gamma + K_1 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \sin \gamma + \\ & + (C_1 - 3D_1 + 3F_1 \sin^2 \gamma + H_1 \sin^2 \varphi) u \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma + \\ & + 2 (G_1 \sin^2 \gamma - L_1 + H_1 \sin \gamma \sin \varphi) u \dot{\varphi} \sin \gamma \cos \varphi = 0, \\ & E_1 \ddot{\gamma} + J_1 \ddot{\varphi} \cos(\varphi - \gamma) - J_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \gamma) + B_1 (\dot{u} \sin \gamma + u \dot{\gamma} \cos \gamma) \cos \gamma + \\ & + (D_1 - F_1 \sin^2 \gamma - G_1 \sin \gamma \sin \varphi) u^2 \sin \gamma \cos \gamma + \\ & + (k_1 + k_2) \gamma - k_2 \varphi - (m_b + m_r) gh \sin \gamma = 0, \\ & N_1 \ddot{\varphi} + J_1 \ddot{\gamma} \cos(\varphi - \gamma) - J_1 \dot{\gamma}^2 \sin(\varphi - \gamma) + K_1 (\dot{u} \sin \gamma + u \dot{\gamma} \cos \gamma) \cos \varphi + \\ & + (L_1 - H_1 \sin \gamma \sin \varphi - G_1 \sin^2 \gamma) u^2 \sin \gamma \cos \varphi + k_2 (\varphi - \gamma) - m_r g \ell \sin \varphi = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где A_1, B_1, \dots, N_1 — функции параметров системы, а именно

$$A_1 = m_b + m_r, \quad J_1 = m_r h \ell, \quad E_1 = I_{bx} + (m_b + m_r) h^2,$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \left[\frac{m_b}{2} (\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r) + \frac{m_r}{a} ((a-d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r) \right] h, \\
C_1 &= \frac{m_b}{4} (\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r)^2 + \frac{I_{bz} + I_{rz}}{a^2} (\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)^2 + \frac{m_r}{a^2} ((a-d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r)^2, \\
F_1 &= \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)^2}{a^2} ((m_b + m_r) h^2 + I_{by} - I_{bz}), \quad L_1 = \frac{m_r \ell (\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)}{a}, \\
H_1 &= \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)^2}{a^2} (I_{ry} - I_{rz} + m_r \ell^2), \quad K_1 = \frac{m_r \ell}{a} ((a-d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r), \\
D_1 &= \frac{(m_b + m_r) (\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r) h}{a}, \quad N_1 = I_{rx} + m_r \ell^2, \quad G_1 = \frac{m_r h \ell (\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)^2}{a^2}.
\end{aligned}$$

Уравнения (2.2), (2.3), (3.1) образуют замкнутую систему уравнений движения данной модели скейтборда. Основным объектом нашего дальнейшего исследования станет система уравнений (3.1). Покажем теперь, что при любом значении постоянных A_1, B_1, \dots, N_1 уравнения (3.1) имеют первый интеграл — интеграл энергии. Действительно, если умножить первое из уравнений (3.1) на u , второе — на $\dot{\gamma}$, а третье — на $\dot{\varphi}$ и сложить, то после упрощения можно заметить, что полученное выражение является полной производной функции

$$\begin{aligned}
U_0 &= [A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma - 2L_1 \sin \gamma \sin \varphi + \\
&+ 2G_1 \sin^3 \gamma \sin \varphi + H_1 \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi] \frac{u^2}{2} + \frac{E_1}{2} \dot{\gamma}^2 + \frac{N_1}{2} \dot{\varphi}^2 + \\
&+ B_1 u \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma + K_1 u \dot{\varphi} \sin \gamma \cos \varphi + J_1 \dot{\varphi} \dot{\gamma} \cos(\gamma - \varphi) - k_2 \gamma \varphi + \\
&+ \frac{(k_1 + k_2)}{2} \gamma^2 + \frac{k_2}{2} \varphi^2 + (m_b + m_r) gh \cos \gamma + m_r g \ell \cos \varphi = c_0 = \text{const}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Функция (3.2) представляет собой полную механическую энергию системы. Таким образом, для интегрирования уравнений (3.1) нам нужно найти еще три независимых первых интеграла. Вопросы интегрируемости полученной системы уравнений и, в частности, исследование того, когда система уравнений (3.1) может иметь инвариантную меру, рассмотрены ниже.

4. Устойчивость прямолинейного равномерного движения скейтборда

Уравнения (3.1) допускают частное решение

$$u = u_0 = \text{const}, \quad \gamma = 0, \quad \varphi = 0, \tag{4.1}$$

которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Рассмотрим задачу об устойчивости этого движения системы.

Полагая $u = u_0 + \xi$ и сохраняя для γ и φ прежние обозначения, выпишем уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned}
E_1 \ddot{\gamma} + J_1 \ddot{\varphi} + B_1 u_0 \dot{\gamma} + (D_1 u_0^2 + \Pi_{11}) \gamma + \Pi_{12} \varphi &= \Gamma, \\
N_1 \ddot{\varphi} + J_1 \ddot{\gamma} + K_1 u_0 \dot{\gamma} + (L_1 u_0^2 + \Pi_{12}) \gamma + \Pi_{22} \varphi &= \Phi, \quad \dot{\xi} = \Xi, \\
\Pi_{11} &= k_1 + k_2 - (m_b + m_r) gh, \quad \Pi_{12} = -k_2, \quad \Pi_{22} = k_2 - m_r g \ell.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь Γ , Φ и Ξ — не зависящие от времени функции переменных γ , $\dot{\gamma}$, φ , $\dot{\varphi}$ и ξ , разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. При этом имеют место соотношения (данный факт устанавливается прямой проверкой):

$$\Gamma(0, 0, 0, 0, \xi) = \Phi(0, 0, 0, 0, \xi) = \Xi(0, 0, 0, 0, \xi) = 0.$$

Характеристическое уравнение, отвечающее системе (4.2), имеет вид:

$$\begin{aligned} s(b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4) &= 0. \\ b_0 &= E_1 N_1 - J_1^2, \quad b_1 = (B_1 N_1 - J_1 K_1) u_0, \\ b_2 &= (D_1 N_1 - J_1 L_1) u_0^2 + \Pi_{11} N_1 + \Pi_{22} E_1 - 2\Pi_{12} J_1, \\ b_3 &= (B_1 \Pi_{22} - K_1 \Pi_{12}) u_0, \quad b_4 = (D_1 \Pi_{22} - L_1 \Pi_{12}) u_0^2 + \Pi_{11} \Pi_{22} - \Pi_{12}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При выполнении условий критерия Рауса—Гурвица

$$b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_4 > 0, \quad b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 > 0 \quad (4.4)$$

уравнение (4.3) имеет один нулевой корень и четыре корня с отрицательной вещественной частью. Поскольку все нелинейности в системе (4.2) тождественно обращаются в нуль при $\gamma = 0$, $\dot{\gamma} = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, то при условиях (4.4) имеет место особый случай одного нулевого корня [9, 10] и невозмущенное движение (4.1) устойчиво, причем асимптотически относительно переменных γ , $\dot{\gamma}$, φ , $\dot{\varphi}$ и неасимптотически — относительно переменной u .

Первое из условий (4.4) — условие $b_0 > 0$ всегда выполняется; действительно:

$$b_0 = E_1 N_1 - J_1^2 = (I_{bx} + m_b h^2) (I_{rx} + m_r \ell^2) + I_{rx} m_r h^2 > 0.$$

Оставшиеся пять условий имеют довольно громоздкий вид. В самом общем виде они указаны в [2]. Ниже мы приводим их для случая, когда скейтборд симметричен ($\lambda_f = \lambda_r = \lambda$):

$$\begin{aligned} \frac{I_{rx} m_r h}{a} (a - 2d) u_0 \operatorname{tg} \lambda > 0, \quad \frac{m_r}{a} (a - 2d) ((\ell + h) k_2 - m_r g \ell h) u_0 \operatorname{tg} \lambda > 0, \\ \frac{2h u_0^2}{a} (m_b m_r \ell^2 + (m_b + m_r) I_{rx}) \operatorname{tg} \lambda + 2k_2 m_r h \ell + \\ + (I_{bx} + (m_b + m_r) h^2) (k_2 - m_r g \ell) + (I_{rx} + m_r \ell^2) (k_1 + k_2 - (m_b + m_r) g h) > 0, \\ \frac{2u_0^2}{a} ((m_b + m_r) (k_2 - m_r g \ell) h + m_r \ell k_2) \operatorname{tg} \lambda + \\ + (k_1 + k_2 - (m_b + m_r) g h) (k_2 - m_r g \ell) - k_2^2 > 0, \\ [(I_{rx} + m_r \ell^2) k_2 + (k_2 - m_r g \ell) m_r h \ell] \left[\frac{2I_{rx} m_b h^2 \ell}{a} u_0^2 \operatorname{tg} \lambda + \right. \\ \left. + (k_1 - m_b g h) I_{rx} h \ell + (I_{rx} h - I_{bx} \ell - m_b h^2 \ell) ((\ell + h) k_2 - m_r g \ell h) \right] > 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

При строгом нарушении по меньшей мере одного из неравенств (4.5) уравнение (4.3) имеет корень с положительной вещественной частью и невозмущенное движение (4.1) неустойчиво.

Заметим, что структура первых двух неравенств в системе (4.5) позволяет сделать вывод, что устойчивость движения скейтборда будет зависеть от направления движения. Ранее подобный вывод для данной модели был сделан в работах [3, 4, 2, 5], а для более простой модели скейтборда — в [1, 3, 4].

Кроме того, как следует из первых двух неравенств (4.5), если

$$(\ell + h) k_2 - m_r g \ell h < 0,$$

то движение скейтборда будет неустойчивым. То есть движение будет неустойчивым, если коэффициент упругости k_2 торсионной пружины не превосходит некоторого критического значения. С физической точки зрения это означает, что неустойчивость будет иметь место в том случае, если райдер нетвердо стоит на скейтборде.

Значение $u_0 = 0$ в решении (4.1) соответствует положению равновесия, когда скейтборд неподвижно стоит на плоскости. Можно показать [2], что условия устойчивости данного положения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 - (m_b + m_r)gh &> 0, \\ (k_1 + k_2 - (m_b + m_r)gh)(k_2 - m_r g \ell) - k_2^2 &> 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В дальнейшем мы будем говорить, что скейтборд является статически устойчивым, если выполняются неравенства (4.6).

Заметим, что в последнем слагаемом последнего из неравенств (4.5) фигурирует выражение $I_{rx}h - I_{bx}\ell - m_b h^2 \ell$. Опираясь на результаты работ Чэндлера [11], Клаузера [12] и Ханавана [13], можно убедиться, что реальной физической ситуации соответствует случай, когда данное выражение является положительным:

$$I_{rx}h - I_{bx}\ell - m_b h^2 \ell > 0. \quad (4.7)$$

В дальнейшем будем считать неравенство (4.7) выполненным.

Используя результаты работы [14], путем анализа коэффициентов характеристического полинома (4.3), укажем еще в этом пункте необходимые условия для существования инвариантной меры с аналитической плотностью вблизи равномерных прямолинейных движений (4.1) скейтборда. Как известно [14], для этого необходимо, чтобы $\text{tr } \Lambda = 0$, где Λ — матрица линейной части системы (3.1). Вычисляя $\text{tr } \Lambda$ из (4.3), получаем

$$\text{tr } \Lambda = -\frac{b_1}{b_0} = -\frac{(B_1 N_1 - J_1 K_1) u_0}{E_1 N_1 - J_1^2}.$$

Таким образом, инвариантная мера может существовать только в случае, когда $B_1 N_1 - J_1 K_1 = 0$. Это условие выполняется, в частности, когда скейтборд симметричен ($\lambda_f = \lambda_r = \lambda$), а райдер стоит точно в центре скейтборда ($a = 2d$). Если мера действительно существует в этом случае, то интересно было бы получить ее явное выражение.

В следующем пункте изучается поведение системы вблизи положения равновесия $u_0 = 0$, $\gamma = 0$, $\varphi = 0$.

5. Анализ движения системы вблизи положения равновесия

Пусть в стационарном движении (4.1) скорость $u_0 = 0$, т. е. скейтборд стоит на плоскости неподвижно. Необходимым и достаточным условием устойчивости этого положения равновесия будет, согласно результатам, полученным выше, выполнение неравенств (4.6). Пусть эти условия выполнены. Кроме того, будем предполагать, что

$$\text{tg } \lambda_f \geq \text{tg } \lambda_r \quad \text{и} \quad a > 2d.$$

При выполнении этих условий стационарное движение (4.1) будет устойчивым, если $u_0 > 0$, и неустойчивым, если $u_0 < 0$. Рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия. Для этого разрешим сначала уравнения (3.1) относительно \dot{u} , $\ddot{\gamma}$ и $\ddot{\varphi}$ и разложим правые части

полученных уравнений в ряд по u , γ и φ до квадратичных членов включительно. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= c_{11}\gamma^2 + c_{12}\gamma\varphi, \\ \ddot{\gamma} &= c_{21}\gamma + c_{22}\varphi + c_{23}u\dot{\gamma}, \\ \ddot{\varphi} &= c_{31}\gamma + c_{32}\varphi + c_{33}u\dot{\gamma}.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{(B_1 N_1 - J_1 K_1) \Pi_{11} - (B_1 J_1 - K_1 E_1) \Pi_{12}}{A_1 (E_1 N_1 - J_1^2)} > 0, \\ c_{12} &= \frac{(B_1 N_1 - J_1 K_1) \Pi_{12} - (B_1 J_1 - K_1 E_1) \Pi_{22}}{A_1 (E_1 N_1 - J_1^2)} < 0, \\ c_{21} &= \frac{J_1 \Pi_{12} - N_1 \Pi_{11}}{E_1 N_1 - J_1^2} < 0, \quad c_{22} = \frac{J_1 \Pi_{22} - N_1 \Pi_{12}}{E_1 N_1 - J_1^2} > 0, \quad c_{23} = \frac{J_1 K_1 - B_1 N_1}{E_1 N_1 - J_1^2} < 0, \\ c_{31} &= \frac{J_1 \Pi_{11} - E_1 \Pi_{12}}{E_1 N_1 - J_1^2} > 0, \quad c_{32} = \frac{J_1 \Pi_{12} - E_1 \Pi_{22}}{E_1 N_1 - J_1^2} < 0, \quad c_{33} = \frac{B_1 J_1 - K_1 E_1}{E_1 N_1 - J_1^2} < 0.\end{aligned}$$

Сделаем в системе (5.1) замену переменных $\gamma, \varphi, u \rightarrow y_1, y_2, y_3$, приводящую линеаризованные второе и третье ее уравнения к виду, соответствующему нормальным колебаниям.

Линеаризованные второе и третье уравнения системы (5.1) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} - c_{21}\gamma - c_{22}\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} - c_{31}\gamma - c_{32}\varphi &= 0.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Собственные частоты системы (5.2) определяются из уравнения

$$\Omega^4 + (c_{21} + c_{32})\Omega^2 + (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) = 0.$$

Из этого уравнения можно найти два выражения Ω_1^2 и Ω_2^2 ($\Omega_1^2 > \Omega_2^2$) для собственных частот системы (5.2):

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{-(c_{21} + c_{32}) \pm \sqrt{(c_{21} - c_{32})^2 + 4c_{22}c_{31}}}{2}.$$

Соответствующие данным собственным частотам собственные векторы имеют вид:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -c_{22}\mu_1 \\ (c_{21} + \Omega_1^2)\mu_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -c_{22}\mu_2 \\ (c_{21} + \Omega_2^2)\mu_2 \end{pmatrix}.$$

Постоянные μ_1 и μ_2 выберем из условия, что соответствующие собственные векторы должны быть единичными. Тогда

$$\mu_i = \frac{1}{\sqrt{(\Omega_i^2 + c_{21})^2 + c_{22}^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Окончательно можно сделать вывод, что приведение к нормальным координатам осуществляется при помощи замены переменных

$$\begin{aligned}\gamma &= -c_{22}\mu_1 y_1 - c_{22}\mu_2 y_2, \\ \varphi &= (\Omega_1^2 + c_{21})\mu_1 y_1 + (\Omega_2^2 + c_{21})\mu_2 y_2, \\ u &= y_3.\end{aligned}\quad (5.3)$$

В переменных y_1, y_2, y_3 , определяемых согласно (5.3), система уравнений (5.1) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \Omega_1^2 y_1 + Q_1 \dot{y}_1 y_3 + Q_2 \dot{y}_2 y_3 &= 0, \\ \ddot{y}_2 + \Omega_2^2 y_2 + Q_3 \dot{y}_1 y_3 + Q_4 \dot{y}_2 y_3 &= 0, \\ \dot{y}_3 &= Q_5 y_1^2 + Q_6 y_1 y_2 + Q_7 y_2^2, \\ Q_1 &= \frac{c_{22}c_{33} + c_{21}c_{23} + c_{23}\Omega_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} > 0, \quad Q_2 = \frac{(c_{22}c_{33} + c_{21}c_{23} + c_{23}\Omega_2^2)\mu_2}{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)\mu_1}, \\ Q_3 &= \frac{(c_{22}c_{33} + c_{21}c_{23} + c_{23}\Omega_1^2)\mu_1}{(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)\mu_2}, \quad Q_4 = \frac{c_{22}c_{33} + c_{21}c_{23} + c_{23}\Omega_1^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} > 0, \\ Q_5 &= c_{22}(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} - c_{12}\Omega_1^2)\mu_1^2 > 0, \\ Q_6 &= c_{22}(2c_{11}c_{22} - 2c_{12}c_{21} - c_{12}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2))\mu_1\mu_2, \\ Q_7 &= c_{22}(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} - c_{12}\Omega_2^2)\mu_2^2 > 0.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Как и в (5.1), в системе (5.4) отброшены члены выше второго порядка относительно возмущений. Для исследования нелинейной системы (5.4) приведем ее к нормальной форме [15, 16, 17]. Сначала сделаем замену переменных

$$y_1 = \frac{z_1 - z_3}{2i}, \quad y_2 = \frac{z_2 - z_4}{2i}, \quad \dot{y}_1 = \frac{z_1 + z_3}{2}\Omega_1, \quad \dot{y}_2 = \frac{z_2 + z_4}{2}\Omega_2, \quad y_3 = z_5.$$

В переменных $z_k, k = 1, 2, \dots, 5$, линейная часть системы (5.4) имеет диагональную форму и получение нормальной формы сводится к выделению резонансных членов в правых частях преобразованной системы (5.4). Учитывая это, получаем следующую нормальную форму системы (5.4), записанную в комплексных переменных:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= i\Omega_1 z_1 - \frac{Q_1}{2} z_1 z_5, \quad \dot{z}_2 = i\Omega_2 z_2 - \frac{Q_4}{2} z_2 z_5, \quad \dot{z}_3 = -i\Omega_1 z_3 - \frac{Q_1}{2} z_3 z_5, \\ \dot{z}_4 &= -i\Omega_2 z_4 - \frac{Q_4}{2} z_4 z_5, \quad \dot{z}_5 = \frac{Q_5}{2} z_1 z_3 + \frac{Q_7}{2} z_2 z_4.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Вводя теперь вещественные полярные координаты согласно формулам

$$\begin{aligned}z_1 &= \rho_1 (\cos \sigma_1 + i \sin \sigma_1), \quad z_2 = \rho_2 (\cos \sigma_2 + i \sin \sigma_2), \\ z_3 &= \rho_1 (\cos \sigma_1 - i \sin \sigma_1), \quad z_4 = \rho_2 (\cos \sigma_2 - i \sin \sigma_2), \quad y_5 = \rho_3,\end{aligned}$$

запишем систему (5.5) в переменных $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2$. В результате получим нормализованную систему уравнений возмущенного движения, которая распадается на две независимые подсистемы:

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{Q_1}{2}\rho_1\rho_3, \quad \dot{\rho}_2 = -\frac{Q_4}{2}\rho_2\rho_3, \quad \dot{\rho}_3 = \frac{Q_5}{2}\rho_1^2 + \frac{Q_7}{2}\rho_2^2, \quad (5.6)$$

$$\dot{\sigma}_1 = \Omega_1, \quad \dot{\sigma}_2 = \Omega_2. \quad (5.7)$$

В (5.6) отброшены члены выше второго, а в (5.7) — выше первого порядка относительно $\rho_k, k = 1, 2, 3$.

В ε -окрестности положения равновесия правые части уравнений (5.6) и (5.7) отличаются от отвечающих им правых частей точных уравнений возмущенного движения на величины порядка ε^3 и ε^2 соответственно. Решения точных уравнений аппроксимируются решениями системы (5.6)–(5.7) с погрешностью порядка ε^2 для ρ_k и порядка ε для σ_j на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. Ограничиваясь этой точностью, будем вместо полных уравнений возмущенного движения рассматривать приближенную систему (5.6)–(5.7).

Уравнения (5.7) сразу интегрируются. Получаем

$$\sigma_j(t) = \Omega_j t + \sigma_j(0), \quad j = 1, 2.$$

Система (5.6) описывает эволюцию амплитуды ρ_1 колебаний доски, амплитуды ρ_2 колебаний райдера и скорости ρ_3 прямолинейного движения скейтборда. Легко показать, что данная система имеет два первых интеграла

$$\rho_1^{-\alpha_1} \rho_2 = n_2, \quad \left(\alpha_1 = \frac{Q_4}{Q_1} > 0 \right), \quad (5.8)$$

$$\alpha_2 \rho_1^2 + \alpha_3 \rho_2^2 + \rho_3^2 = n_1^2, \quad \left(\alpha_2 = \frac{Q_5}{Q_1} > 0, \alpha_3 = \frac{Q_7}{Q_4} > 0 \right), \quad (5.9)$$

где n_1, n_2 — постоянные, определяемые начальными условиями.

Траектории системы (5.6) представлены на рис. 4 в пространстве ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Они расположены в области $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$ и представляют собой кривые, являющиеся пересечением поверхности эллипсоида (5.9) и цилиндрической поверхности (5.8). Направление движения по траекториям показано стрелками.

Остановимся на свойствах решений системы (5.6) и их связи с характером движения скейтборда. Точками $P_1 = (0, 0, n_1)$ и $P_2 = (0, 0, -n_1)$ на рисунке отмечены положения равновесия системы (5.6). Им отвечают равномерные прямолинейные движения скейтборда в устойчивом и неустойчивом направлениях. Линеаризуя уравнения (5.6) в окрестности указанных положений равновесия, получим

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{Q_1}{2} n_1 \rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = -\frac{Q_4}{2} n_1 \rho_2, \quad \dot{\rho}_3 = 0,$$

т. е. если $n_1 > 0$, то положение равновесия $(0, 0, n_1)$ будет устойчивым, а положение равновесия $(0, 0, -n_1)$ будет соответственно неустойчивым. Если $n_1 < 0$, то, наоборот, положение $(0, 0, n_1)$ будет неустойчивым, а положение $(0, 0, -n_1)$ — устойчивым.

Система уравнений (5.6) имеет следующие два частных решения, в которых ρ_1 или ρ_2 тождественно равны нулю:

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 2\sqrt{\frac{Q_4}{Q_7} n_1^2 n_3} \frac{\exp\left(-\frac{Q_4 n_1}{2} t\right)}{1 + n_3 \exp(-Q_4 n_1 t)}, \quad \rho_3 = n_1 \frac{1 - n_3 \exp(-Q_4 n_1 t)}{1 + n_3 \exp(-Q_4 n_1 t)}; \quad (5.10)$$

$$\rho_2 = 0, \quad \rho_1 = 2\sqrt{\frac{Q_1}{Q_5} n_1^2 n_4} \frac{\exp\left(-\frac{Q_1 n_1}{2} t\right)}{1 + n_4 \exp(-Q_1 n_1 t)}, \quad \rho_3 = n_1 \frac{1 - n_4 \exp(-Q_1 n_1 t)}{1 + n_4 \exp(-Q_1 n_1 t)}. \quad (5.11)$$

Здесь n_3 и n_4 — неотрицательные произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Решение (5.10) отвечает таким движениям скейтборда, когда в процессе прямолинейного движения доска остается неподвижной, а райдер раскачивается с амплитудой $\rho_2(t)$ (т. е. система совершает низкочастотные колебания). Зависимости функций ρ_2 и ρ_3 от времени дают полное представление о характере движения скейтборда в этом частном случае. Будем

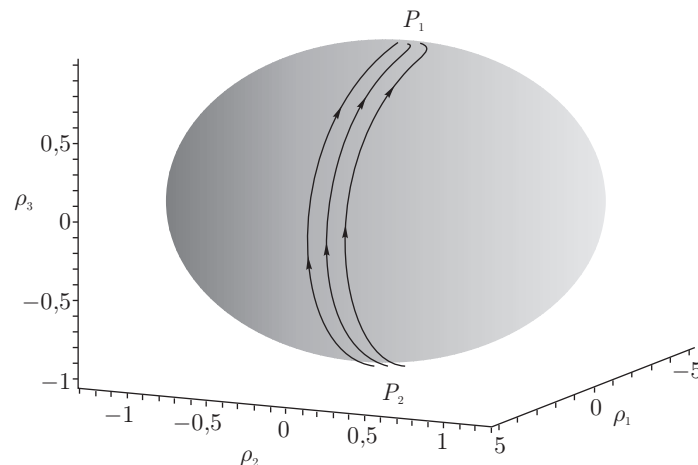


Рис. 4

считать, что мы находимся в окрестности устойчивого равновесия ($n_1 > 0$) и в начальный момент времени $\rho_3(0) \geq 0$, т. е. $n_3 \leq 1$ (случай $n_1 > 0, n_3 > 1$ аналогичен случаю $n_1 < 0, n_3 < 1$, который будет рассмотрен ниже). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_3(0) = n_1 \frac{1 - n_3}{1 + n_3}$$

в устойчивом направлении. Тогда с течением времени амплитуда колебаний райдера ρ_2 монотонно убывает от ее начального значения

$$\rho_2(0) = \frac{2n_1}{1 + n_3} \sqrt{\frac{Q_4}{Q_7} n_3}$$

до нуля (рис. 5), а скорость движения скейтборда ρ_3 возрастает по модулю. В пределе скейтборд движется в устойчивом направлении с постоянной скоростью n_1 (рис. 6).

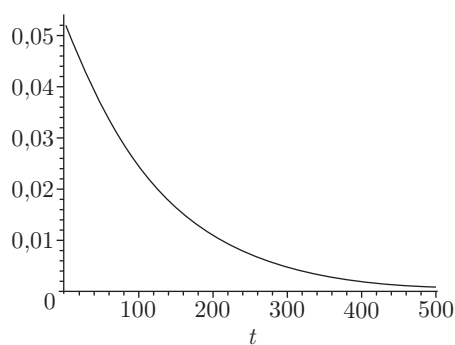


Рис. 5. Зависимость амплитуды колебаний райдера ρ_2 от времени для частного решения (5.10) в случае $n_1 > 0, n_3 \leq 1$

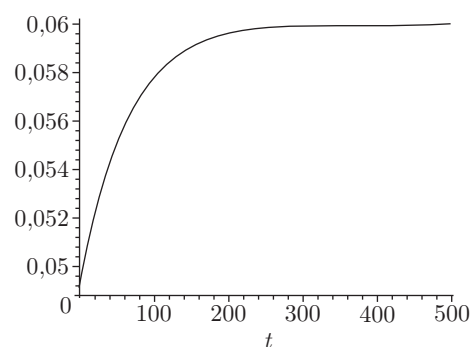


Рис. 6. Зависимость скорости скейтборда ρ_3 от времени для частного решения (5.10) в случае $n_1 > 0, n_3 \leq 1$

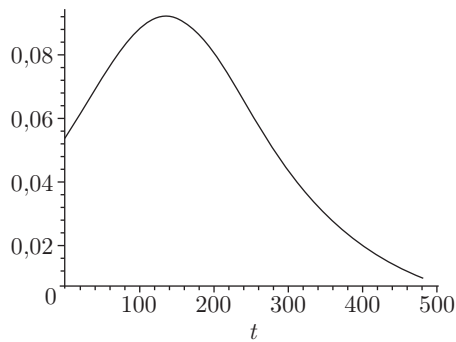


Рис. 7. Зависимость амплитуды колебаний райдера ρ_2 от времени для частного решения (5.10) в случае $n_1 < 0$, $n_3 \leq 1$

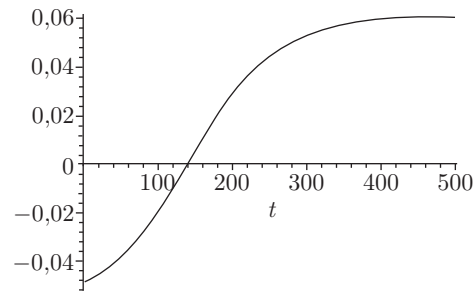


Рис. 8. Зависимость скорости скейтборда ρ_3 от времени для частного решения (5.10) в случае $n_1 < 0$, $n_3 \leq 1$

Пусть теперь мы находимся в окрестности неустойчивого равновесия $n_1 < 0$. Предположим снова, что в начальный момент времени $n_3 < 1$, т. е. $\rho_3(0) < 0$ (случай $n_1 < 0$, $n_3 > 1$ аналогичен разобранному выше случаю $n_1 > 0$, $n_3 < 1$). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_3(0) = n_1 \frac{1 - n_3}{1 + n_3}$$

в неустойчивом направлении. В этом случае предельное движение системы будет таким же, как и при $\rho_3(0) \geq 0$, но эволюция движения существенно иная. При

$$0 < t < t_* = \frac{\ln(n_3)}{Q_4 n_1}$$

амплитуда колебаний райдера ρ_2 монотонно возрастает, а скейтборд движется в неустойчивом направлении со все уменьшающейся скоростью. В момент $t = t_*$ скорость скейтборда обращается в нуль, а амплитуда колебаний ρ_2 достигает своего максимального значения

$$\rho_2(t_*) = \sqrt{\frac{Q_4}{Q_7} n_1^2}.$$

При $t > t_*$ скейтборд движется уже в устойчивом направлении с возрастающей скоростью, а амплитуда колебаний райдера монотонно убывает (рис. 7). Таким образом, при $\rho_3(0) < 0$ за время эволюции движения один раз происходит смена направления прямолинейного движения скейтборда с постоянной скоростью (рис. 8). Ранее аналогичный эффект был получен для более простой модели скейтборда [1], известен он также и в других задачах неголономной механики (например, в классической задаче о движении кельтского камня [15, 16], [18]–[25]).

Решение (5.11) отвечает таким движениям скейтборда, когда в процессе прямолинейного движения доска раскачивается с амплитудой $\rho_1(t)$, а райдер остается неподвижным (т. е. система совершает высокочастотные колебания). Анализ эволюции движения в этом случае аналогичен предыдущему случаю. Если скейтборд движется в неустойчивом направлении, то при

$$t = t_{**} = \frac{\ln(n_4)}{Q_1 n_1}$$

происходит смена направления движения. В этот момент амплитуда колебаний доски ρ_1 достигает своего максимального значения

$$\rho_1(t_{**}) = \sqrt{\frac{Q_1}{Q_5} n_1^2}.$$

Рассмотрим теперь решения системы (5.6), отличные от решений (5.10), (5.11) и от положений равновесия P_1 и P_2 . Из интегралов (5.8) и (5.9) имеем:

$$\rho_2 = n_2 \rho_1^{\alpha_1}, \quad \rho_3 = \pm f(\rho_1), \quad (5.12)$$

$$f(\rho_1) = \sqrt{n_1^2 - \alpha_2 \rho_1^2 - \alpha_3 n_2^2 \rho_1^{2\alpha_1}}.$$

Подставив ρ_3 из (5.12) в первое уравнение системы (5.6), получим

$$\dot{\rho}_1 = \mp \frac{Q_1}{2} \rho_1 f(\rho_1),$$

откуда, разделяя переменные, находим

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1 f(\rho_1)} = \mp \frac{Q_1}{2} dt. \quad (5.13)$$

Если из (5.13) найдена функция $\rho_1(t)$, то $\rho_2(t)$ и $\rho_3(t)$ вычисляются по формулам (5.12).

Найти явную аналитическую зависимость ρ_1 от времени невозможно. Но качественный характер движения можно получить непосредственно из системы уравнений (5.6). Пусть, например, в начальный момент величина ρ_3 положительна. Тогда поскольку $Q_1 > 0$ и $Q_4 > 0$, то правые части первых двух уравнений системы (5.6) будут отрицательны и, следовательно, функции $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ будут убывать с течением времени. Так как $Q_5 > 0$ и $Q_7 > 0$, то в правой части третьего уравнения стоит неотрицательное выражение, которое убывает, поскольку убывают ρ_1 и ρ_2 . В пределе $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ стремятся к нулю, а $\rho_3(t)$ стремится к величине n_1 , как следует из интеграла (5.9).

Пусть теперь в начальный момент величина ρ_3 отрицательна. Тогда в правых частях двух первых уравнений системы (5.6) стоят положительные выражения и, следовательно, функции $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ будут возрастать с течением времени. Также будет возрастать, оставаясь отрицательной, и функция $\rho_3(t)$. В какой-то момент она обратится в нуль; в этот момент функции $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ примут свои максимальные значения. После этого момента времени функция $\rho_3(t)$ поменяет знак и начнет принимать положительные значения, функции $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ начнут убывать и в пределе мы придем к ситуации, описанной выше. Таким образом, и в общем случае качественная картина движения будет очень похожа на ту, что была описана нами при рассмотрении частных решений (5.10)–(5.11), с той лишь разницей, что в общем случае мы не можем указать явных зависимостей функций ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 от времени.

Таким образом, мы исследовали некоторые свойства модели скейтборда с тремя степенями свободы, обобщающей исследованную нами в препринте [1] простейшую модель скейтборда. Данную модель можно развивать в различных направлениях: с одной стороны, можно рассмотреть более сложную конструкцию скейтборда и учесть наличие колес и характер их взаимодействия с опорной плоскостью. С другой стороны, можно построить более сложную (и более соответствующую реальности) конструкцию подвески и выяснить, какие дополнительные динамические эффекты возникают при такой конструкции. Можно построить также более сложную конструкцию райдера, ввести в систему управление и изучать систему с управлением. Все эти задачи являются весьма интересными, и мы непременно обратимся к ним в будущем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00363).

Список литературы

- [1] Кремнев А. В., Кулешов А. С. *Нелинейная динамика и устойчивость движения простейшей модели скейтборда*. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при Механико-математическом ф-те МГУ. 2007. 104 с. <http://akule.pisem.net/Kuleshov.pdf>
- [2] Кремнев А. В., Кулешов А. С. *Математическая модель скейтборда с тремя степенями свободы*, М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ, 2008. <http://akule.pisem.net/Kuleshov2008.pdf>
- [3] Hubbard M. Lateral Dynamics and Stability of the Skateboard, *Journal of Applied Mechanics*, 1979, vol. 46, pp. 931–936.
- [4] Hubbard M. Human Control of the Skateboard, *Journal of Biomechanics*, 1980, vol. 13, pp. 745–754.
- [5] Кулешов А. С. Математические модели динамики скейтборда, *Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением»*, Иркутск, 2007, т. 4. с. 125–136.
- [6] Лурье А. И. *Аналитическая механика*. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961.
- [7] Österling A. E. *MAS 3030. On the skateboard, kinematics and dynamics*, 2004. School of Mathematical Sciences, University of Exeter. United Kingdom. <http://akule.pisem.net/theSkateboard.pdf>
- [8] <http://www.peterverdonedesigns.com/pvdtrucks.htm>
- [9] Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*, М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
- [10] Четаев Н. Г. *Устойчивость движения*, М.: Наука, 1990.
- [11] Chandler R. F., Clauser C. E., McConville J. T., Reynolds H. M. and Young J. W. Investigation of inertial properties of the human body, *Technical Report DOT HS801 430. Aerospace Medical Research Laboratory. WrightPatterson Air Force Base. OH*, 1975.
- [12] Clauser C. E., McConville J. T. and Young J. W. Weight, volume, and center of mass of segments of the human body, *Technical Report AMRLTR6970 (AD710 622). Aerospace Medical Research Laboratory. Aerospace Medical Division. Air Force Systems Command. WrightPatterson Air Force Base. OH*, 1969.
- [13] Hanavan E. P. A mathematical model of the human body, *Technical Report TR64102 (AD 608 463). Aerospace Medical Research Laboratory. WrightPatterson Air Force Base. OH*, 1964.
- [14] Козлов В. В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем, *ПММ*, 1987, т. 51, вып. 4, с. 538–545.
- [15] Маркеев А. П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости, *Прикладная математика и механика*, 1983, т. 47, вып. 4, с. 575–582.
- [16] Маркеев А. П. *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*, М.: Наука, 1992.
- [17] Брюно А. Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, М.: Наука. 1979.
- [18] Walker G.T. On a curious dynamical property of celtis, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 1895, vol. 8, pt. 5, pp. 305–306.
- [19] Walker G. T. On a Dynamical Top, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1896, vol. 28, pp. 175–184.
- [20] Bondi H. The rigid body dynamics of unidirectional spin, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1986, vol. 405, pp. 265–274.

- [21] Garcia A. and Hubbard M. Spin reversal of the rattleback: theory and experiment, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1988, vol. 418, pp. 165–197.
- [22] Астапов И. С. Об устойчивости вращения кельтского камня, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*, 1980, по. 2, с. 97–100.
- [23] Карапетян А. В. О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, *Прикладная математика и механика*, 1981, т. 45, вып. 5, с. 808–814.
- [24] Карапетян А. В. Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости, *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1985, по. 2, с. 19–24.
- [25] Карапетян А. В. *Устойчивость стационарных движений*, М.: Эдиториал УРСС, 1998.